Recursively enumerable degrees について

大　橋　健　八　郎

目　　次

Recursively enumerable degrees について

大 橋 健 八 郎

Note on recuvsiuely enumerable degrees

Kempachiro Ohashi

The main purpose of this paper is to prove the following propositions 1°, 2°.

1° Let A and B be recursively enumerated sets enumerated by recursive functions f and g, respectively, without repetitions.

Then A is recursive in B if and only if there exist recursive functions $F(w)$ and $G(w)$ which satisfy the following conditions ;

(i) $\{F(w) \mid w \geq o\}$ is infinite,

(ii) for each t, there exists at least one s such that

$(w)w<t(f(t)<F(w) \rightarrow g(s)<G(w))$ & $t \leq s$.

2° Let B_0, ………, B_m be non-recursive recursively enumerable sets, and $P_i(x, y, X_1, \cdots\cdots\cdots, X_{m-1})$ be predicates recursive in sets X_1, ………, X_{m-1} for each $i \leq m-1$.

Then there exist recursively enumerable sets A_1, ………, A_{m-1} such that (a) and (b) are satisfied ;

(a) $(x)(Ey)(P_i(x, y, A_1, \cdots\cdots\cdots, A_i, A_{i+2}, \cdots\cdots\cdots A_{m-1}) \not\equiv y \in B_i)$ for each i<m,

(b) $(x)(x \in B_m \equiv (Ej)(x \in A_j))$.

The last proposition, which is proved with the help of the priority method, gives an alternative proof of the existence theorem by Sacks.

K. Gödel は (1) で次のことを示した。

1. すべての recursively enumerable (今後 r. e. と略す) 集合が表現可能な形式体系は決定不可能 (undecidable) である。

2. 体系 $\sum_0$ が決定不可能でありかつ他の体系 $\sum$ に翻訳可能であれば，$\sum$ はまた決定不可能である。

こゝで，$\sum_0$ が $\sum$ に翻訳可能であるとは，$\sum_0$ の各式 F_0 に対して $\sum$ の式 F を見出す有限的に有効な (effective) 方法があって，F_0 が $\sum_0$ で証明可能であるとき，丁度そのとき F が $\sum$ で証明可能であるようにすることができることである。

多くの数学的体系が上の性質をもっていることは既に知られているが，上の結果を適用することによって，第1階の述語論理内で表現される数学的体系がすべて決定不可能であることを証明しうると予測されている。この超数学（metamathematics）上の問題はGödelによる数化（Gödel numbering）を行えば，自然数の集合に関する数学的問題に翻訳される。Post(2)はこれら多くの決定不可能な数学的体系に決定不可能性の程度の差があることに注目し，決定不可能性の度合を自然数の集合間の関係としてとらえ，典型的なr.e.集合，recursive集合，creative集合，simple集合，hypersimple集合の間の性質 "many-one reducibility"，"recursive in" を研究した。degrees of recursive unsolvability（あるいは単にdegrees）はそこで決定不可能性の類別として提出された。

degreeは体系を取扱う際の難易，精度の1つの目安に対応するものであるから，その階層（hierarchy）が当時の大きな研究題目となったのは極く自然であった。

S. C. Kleene and E. L. Post(3)，およびS. C. Kleene(4)はその方向に沿って多くの重要な結果を導き出している。

興味ある特殊なdegreesについて，H. Rogers(11)はそれを性格づける述語の形に注目して，$\{x|w_x$ はrecursive$\}$ が $\{x|w_x$ がcreative$\}$ と同一のdegreeに属し，$\{x|w_x$ はsimple$\}$ は $\{x|w_x$ はhypersimple$\}$ と同一のdegreeに属することを示した。（w_x はr. e. 集合の標準的な1つのenumerationとする。）

互いに比較不可能な2つのdegreesが存在することは知られていたが，"互いに比較不可能な2つのr. e. degreesが存在するか？"（Postの問題）という簡単ではあるが本質的な問は，Friedberg(5)，Muchnik(6)によって，時と方法とを殆んど同じくして，肯定的に解かれるまで未解決のまゝ置かれた。

そこでFriedberg等により採用された所謂priority methodは，Sacksが次のような多くの顕著な結果を導き出すのに用いられることによって，広い範囲にわたって有効であることを示した。その中r. e. 集合に関する構造上興味ある結果には次のようなものがある。((7)，(8)，(9))

1° b，c を $b<c$ であり，c は b にrecursively enumerableであるようなdegreesとするとき，$c_0 \cup c_1 = c$，$c_0 | c_1$，$b<c_0<c$，$b<c_1<c$，更に c_0，c_1 は b にrecursively enumerableであるようなdegrees c_0，c_1 が存在する。

2° non-recursive r. e. 集合は互いに比較不可能な2つの素なr. e. 集合の和である。

3° c が c より小さいdegreeにrecursively enumerableであれば，c は c より小さいdegrees全体の集合の上限である。

4° 集合 c がrecursiveである必要かつ十分な条件は，c がすべてのnon-recursive r. e. 集合にrecursiveであることである。((7)，(8))

r. e. degreesは可附番個あることは容易に知られるが，r. e. degrees全体の集合はどのような構造をもつであろうか？　それに関してえられた最も著しい結果は次のものであろう。

5° b，c が $b<c$ であるようなr. e. degreesとすれば，$b<d<c$ であるようなr. e. degree d が存在する。((9))

即ち r. e. degrees は稠密に分布している。

r. e. degrees について興味ある他の性質の中演算 "∪" (join) についての初等的な結果は (3) に詳細に述べられているが，その逆演算については，Yates (11) が次のような重要な結果がえられたことを報じている。

$0<b<c$ で $b\cup d=c$ なる r. e. degree d が存在すれば，常に $d=c$ であるような r. e. degrees b, c が存在する。

此の小文では，上の諸結果に関連してえられたいくつかの命題を次の要領で述べる。r. e. degrees に関する問題を考える際，他の本質的な性質を考察する場合と同様に，recursive な述語，あるいは r. e. 集合の enumeration 特にその Gödel 数化が主要な役割を演じ，可成り都合のよい数化が見付かれば問題の解が簡単になる場合がある。数化についての一般論は H. Rogers (12) に見られるが，こゝでは "早さ" を中心とした問題に関連するものに限って考察する。(§1)

"recursive in" なる概念は一般に可成りとらえ難く，Sacks の諸論文にも見られるように，どのような目的でこのような錯綜した計算を行わなければならないか一見しただけでは理解し難い。これは簡単な概念 "recursive in" が計算する上で都合のよいように理解されていないためであろう。

§2に挙げたいくつかの結果は計算する際都合のよいと思われる解釈に沿ったものである。

§3において可成り一般的であると考えられる命題を証明する。この命題の系として，r. e. degrees についての上記の諸結果がえられる。これはより広い範囲に適用されるようにさらに一般化されうるが，それについては他の場所で述べるであろう。

以下で用いられる記号は主として S. C. Kleene (13) によるものとする。

§1. Enumeration について

A を任意の r. e. 集合とすれば

$$A=A_e=\{n\,|\,U(\mu yT(e,n,y))=0\ \&\ y\geq 0\}$$

であるような e が存在するが，このような e は唯一つとは限らない。例えば $x+n+1=0$ を満足する x を求める方程式の Gödel 数を $\gamma(n)$ とすれば

$$A=A_e=A_{e*\gamma(n)},$$

明らかに $\{e*\gamma(n)\,|\,n\geq 0\}$ は無限集合である。e で A を enumerate する手続きをその段階について考察するために，$A_e{}^s$ を次のように定義する。

$$A_e{}^s=\{n\,|\,U(\mu yT(e,n,y))=0\ \&\ y\leq s\}$$

再び上の考察から明らかなように各 e, s に対し

$$A_e{}^s=A_{e'}{}^{s'} \text{ かつ } A_e=\lim_s A_e{}^s$$
$$\neq\lim_{s'} A_{e'}{}^{s'}$$

であるような e', s' は無限個存在する。

さて，A を実際に enumerate する場合，上のような支障に出会いながら，どのようなことが

起るであろうか。

Gödel 数 e で，ある自然数 n が enumerate されると予め知られている場合は，n を enumerate し終える（確かに有限の段階で enumerate し終える）まで計算し続ければよいが，n が enumerate されるか否か予め知られていない場合は——n を enumerate しない場合は上の操作は永久に続けられるから——有限性を保ちながらこの操作を“一様”に行なうためには，有限の段階で区切り，その各段階 s について n が enumerate された場合は確答がえられ操作は完了し，段階 s までに n が enumerate されていない場合は，n が enumerate されうるか否かの判定は s 以後の段階に委譲しなければならない。

例えば A_i を enumerate するというようないくつかの操作 $\{0_i\}$ $i=1,\cdots\cdots,k$ により，自然数の集合 R を enumerate しようという場合，0_i の操作を完了した後に 0_j $(i\neq j)$ の操作に移るという仕方では R は必ずしも r.e. であることを保証されないが，各 $0_i i=1,\cdots\cdots,k$ を有限の段階 s までにおさえ，しかる後に一様に s を増大して行くとき，R は r.e. となるようなことが屢々ある。

このような制限のもとで，自然数の r.e. 集合 A を enumerate するとき，$A_e{}^s$ の各 s に対する状態を調べることになるが，この場合にも他の新しい支障が生ずる。

$A_e{}^s$ は有限集合であるから，

$$A_e{}^s=A_{e'}{}^{s'} \text{ でかつ } \lim_s A_{e'}{}^s\neq A_e$$

であるような e' は無限個存在するが，さらに段階 s について，$A_{e'}{}^s$ の方が $A_e{}^s$ よりよりよく A_e に近似していることがありうる。即ち

$$A_e{}^s\subset A_{e'}{}^s\subset A_e,\ A_e{}^s\neq A_{e'}{}^s,$$

$$\lim_s A_{e'}\neq A_e$$

であるような e' が各段階 s について存在するか否かは速断を許されない。しかもたしかに次の定理が成立する。

定理 1. すべての Gödel 数化に対して，ある r.e. 集合 A_e（e は Gödel 数）が存在して，

任意の s に対して e', s' が存在し，

$$s<s' \ \&\ A_e{}^{s'}\subset A_{e'}{}^{s'}\subset A_e \ \&\ A_e{}^{s'}\neq A_{e'}{}^{s'}$$

かつ

$$\lim_s A_{e'}\neq A_e$$

である。

(10) に報ぜられている結果を用いることによって証明されるが，この完全な証明は他の場所で与えるであろう。

Gödel 数化について適当な条件を加えた場合は，定理 1 に対して次の定理が成立する。

定理 2. n 個の Gödel 数 $e_i(i<n)$ に対して，s の関数 $i(s)$ があって

$$A^{s-1}_{e\,i(s-1)}\subset A^s_{e\,i(s)}\subset A,\ s=0,1,2,\cdots\cdots$$

$$\lim_s A^s_{e\,i(s)}=A,\ \ A^s_{e\,i}\subset A\ \ i<2\ \ s=0,1,2,\cdots\cdots$$

であれば，各 s に対して

$$A^s_{e\,i(s)} \subset A^s_{e\,n} \text{ かつ } \lim_s A^s_{e\,n} = A$$

が成立する e_n が存在するような Gödel 数化が存在する。

証明　Kleene[8] P. 278 における Df 12 において

Df 12*

$D'(z,\ y)$ を

$$D(z,\ y)V(i)_{i<lh(z)}D((z)_i,\ y)$$

とし，

$$e_n = \prod_{i<n} p_i^{\ e_i}$$

とおく。

D を D' で置き換えて，P 277—P 281((8)) と全く同様に定義されたものを，すべて "′" をつけて表わすことにする。

明らかに，すべての x に対して

$$\{U(\mu y T'(e_0,\ x, y)) = 0\ V\cdots\cdots VvU(\mu y T'(e_{n-1},\ x,\ y)) = 0\}$$

$$\leftrightarrow\ U(\mu y T'(e_n,\ x,\ y)) = 0$$

しかも

$$\lim_s A^s_{e\,n} = A$$

である。

これは容易に次のように拡張される。

系　すべての s に対して

$$A^{s-1}_{e\,i(s-1)} \subset A^s_{e\,i(s)} \subset A,$$

$$\lim_s A^s_{e\,i(s)} = A,$$

かつ $U(\mu y(T(e',\ e_{i(s)}, y)\ \&\ y \leq s)) = 0$ で $(e)(e \neq e_{i(s)} \rightarrow U(\mu y(T(e',\ e,\ y)\ \&\ y \leq s) > 0)$ であるような e' が存在すれば，

$$A^s_{e\,i(s)} \subset A^s_{e*},\quad \lim_s A^s_{e*} = A$$

である e^* が必ず存在するような Gödel 数化がある。

証明

$$T_n(z,\ x_1, \cdots\cdots,\ x_n,\ y) \equiv (E_w)_{w \leq y}(E_x)_{x<w}\{U(\mu w(T(z,\ x,\ w)\ \&\ w \leq y)) = 0$$

$$\&\ T_n(x,\ x_1, \cdots\cdots,\ x_n,\ y) V T_n(z,\ x_1, \cdots\cdots,\ x_n,\ y)\}$$

とおく。

$z = e'$ とすれば，すべての n に対して，

$$U(\mu y_{y \leq s} T(z,\ n,\ y)) = 0 \leftrightarrow U(\mu y_{y \leq s} T(e_{i(s)},\ n,\ y)) = 0$$

が成立する。

従って $e^* = e'$ とおけば，条件が満足される。

§2. Recursively reducibility

A が B に recursive であるときを，recursively reducible ともいう。[14]

r. e. 集合 A, B が recursive な関数 f, g により下のように重複なしに enumerate されているとする。

$$A=\{f(n)\mid n\geq o\},\ B=\{g(n)\mid n\geq 0\},$$

$$n\neq m\to f(n)\neq f(m),\ g(n)\neq g(m)$$

$a(s, n)$, $b(s, n)$ を次のように定義された 2 変数 recursive 関数とする。

$$a(s,\ n)=\begin{cases}0 & (Ek)(k\leq s\&f(k)=n)\ \text{であるとき}\\ 1 & \text{他の場合}\end{cases}$$

$$b(s,\ n)=\begin{cases}0 & (Ek)(k\leq s\ \&\ g(k)=n)\ \text{であるとき}\\ 1 & \text{他の場合}\end{cases}$$

次の定理は "recursively reducibility" という概念を可成り取扱い易くすると思われる。

定理 3. A, B を recursive 関数 f, g で，重複なしに，， enumerate される r. e. 集合とする。

A が B に recursive であるための必要かつ十分な条件は次の条件(i), (ii)を満足する recursive 関数 $F(w)$, $G(w)$ が存在することである。

(i) $\{F(w)\mid w\geq 0\}$ は無限である。

(ii) 各 t に対して少くとも 1 つの s が存在して

$$(w)_{w<t}\{f(t)<F(w)\to g(s)<G(w)\}\ \&\ t\leq s$$

が成立することである。

証明 (a) 十分性

上の条件が満足されているものとする。

n を定数とする。

$w(n)$ を $n<F(w)$ であるような最小の数 w であると定義すれば，(i) よりそのような w が必ず有限の段階で見出されるから，$w(n)$ は recursive 関数である。

$n\in A$ と仮定する。

ある適当な t に対して $n=f(t)$ が成立しなければならない。f は重複を許さないから，このような t は唯 1 つ存在する。

$w(n)<t$ であれば，

$$f(t)<F(w(n))\ \&\ w(n)<t$$

であるから，

$$g(s)<G(w(n))\ \&\ t\leq s$$

であるような s が存在しなければならない。

$$(u)(s<u\to g(u)\geq G(w(n))\ \&\ w(n)\leq s)$$

であるような最小の s を $s(n)$ とかくことにすれば，$s(n)$ は B に recursive であり，$a(s(n), n)=0$ となる。

$t\leq w(n)$ のときは，$w(n)\leq s(n)$

であるから，明らかに

$$a(s(n),\ n)=0$$

即ち何れの場合も

$$a(s(n),\ n)=0$$

となる。

逆に $a(s(n),\ n)=0$ であれば明らかに $n\in A$ である。

上の n は任意であるから，結局 A は B に recursive となる。

(b) 必 要 性

A が B に recursive であると仮定する。上に定義した $a(s,\ n)$，$b(s,\ n)$ に対して次のような性質をもつ Gödel 数 e' が存在する。

$$a_0(s,\ n)=\begin{cases} U(\mu y T_1{}^1(\prod_{j<y} p_j{}^{b(s,j)},\ e',\ n,\ y)) \\ \quad y\leq s\ \&\ T_1{}^1(\prod_{j<y} p_j{}^{b(s,j)},\ e',\ n,\ y) \\ \quad \text{であるような } y \text{ が存在するとき} \\ 2 \quad \text{他の場合}, \end{cases}$$

$$\lim_s a(s,\ n)=\lim_s a_0(s,\ n)$$

$$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots\cdots$$

これについて $F_0(w)$，$G_0(w)$ を次のように定義する。

$$F_0(w)=\mu t_{t\leq w}(a(w,\ t)\neq a_0(w,\ t))$$

$$G_0(w)=\mu t_{t\leq w}(u)(u<F_0(w)\to \mu y_{y\leq w} T_1{}^1(\prod_{j<y} p_j{}^{b(w,j)}, e',\ u,\ y)\leq t)$$

束縛変数はすべて制限されているので，$F_0(w)$，$G_0(w)$ は recursive 関数である。

(2) および $F_0(w)$ の定義より明かに $\{F(w)|w\geq 0\}$ は無限である。

今，$w<t$ かつ $f(t)<F(w)$ が成立すると仮定する。

$$0=a(t,\ f(t))\neq a(t-1,\ f(t))$$

$$=a(w,\ f(t))=a_0(w,\ f(t))=a_0(t-1,\ f(t))=1$$

従って $t\leq s$ かつ $g(s)<G_0(w)$ であるような s が存在しないとすれば，

$t\leq s<s'$ ならば，$u<G_0(w)$ に対し

$$\mu y_{y\leq s} T_1{}^1(\prod_{j<y} p_j{}^{b(s,j)},\ e',\ u,\ y)$$

$$=\mu y_{y\leq s'} T_1{}^1(\prod_{j<y} p_j{}^{b(s',j)},\ e,\ u,\ y)$$

であるから，

$t\leq s$ ならば

$$a(w,\ f(t))=a_0(t-1,\ f(t))=a_0(s,\ f(t))=1$$

一方，$\lim_s a_0(s,\ f(t))=a(t,\ f(t))=0$ でなければならない。

これは不可能であり，仮定は否定されて，$t\leq s$ かつ $g(s)<G_0(w)$ であるような s が存在しなければならない。

即ち，$F_0(w)$，$G_0(w)$ は条件 (ii) を満足することになり，定理は証明された。

系 $F(s)$，$f(s)$ が，すべての s に対して

$$F(s-1)\leq F(s)\ \text{かつ}\ \lim_s F(s)=\infty$$

であるような recursive 関数であれば，$\{f(s)|f(s)\geq F(s-1)\}$ は recursive 集合である。

証明　$g(s)$ を任意の recursive 集合 R を enumerate する recursive 関数とする。

定理 2 における $G(w)$ に対し,

$$G(w)=0 \qquad w=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots\cdots$$

とする。

$f(s)\geq F(s-1)$ であるから常に

$w<s$ ならば $f(s)\geq F(w)$

従って，すべての s に対して，

$$(w)_{w<s}(f(s)<F(w)\rightarrow g(s)<G(w))$$

が成りたつ。

明らかに $\{F(w)|w\geq 0\}$ は無限であり，定理 2 より $\{f(s)|f(s)\geq F(s-1)\}$ はRに *recursive* である。

recursive 集合に *recursive* であるから，結局 $\{f(s)|f(s)\geq F(s-1)\}$ 自身が recursive 集合となる。

定理 3 における条件 (ii) の代りに

(iii)　$(w)_{w<s}(f(s)<F(w)\rightarrow g(s)<G(w))$

$s=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots\cdots$

とおくことができれば，この定理を用いる場合の手続きは可成り簡易化されるであろう。このような $F(w)$, $G(w)$ が見出されうるか否かは未だ知られていないが，recursively reducibility の定義から，次の定理は明らかである。

定理 4.　r. e. 集合 A, B に対して A が B に recursive である必要かつ十分な条件は，次の条件を満足する recursive 関数 $f(s)$, $g(s)$, $F(w)$, $G(w)$ が存在することである。

(i)　$A=\{f(s)|s\geq 0\}$,

$B=\{g(s)|s\geq 0\}$

(ii)　$\{F(w)|w\geq 0\}$ は無限集合である。

(iii)　すべての s に対して

$(w)_{w>s}\{f(s)<F(w)\rightarrow g(s)<G(w)\}$

§3　r. e. 集合の存在定理

1 つの r. e. degree の存在が問われる場合，その degree に属する r. e. 集合が満足すべき条件は比較的簡単な性質に，還元されうることが屡々である。

次の定理はその 1 つの標準的なものに関している。(より一般化された形については他の場所で取扱う。)

定理 5.　$B_0, \cdots\cdots, B_m$ を non-recursive r. e. 集合，$\bar{P}_i(x, y, X_1, \cdots\cdots, X_{m-1})$ を集合 $X_1, \cdots\cdots, X_{m-1}$ に recursive な述語とする。$(i<m)$

このとき次の条件を満足する r. e. 集合 $A_1, \cdots\cdots, A_m$ が存在する。

(a)　$(x)(E_y)\{\bar{P}_i(x, y, A_1\cdots, A_i, A_{i+2}, \cdots\cdots A_m)\neq y\in B_i\}$

$i<m$

(b) $(x)\{x\in B_m\equiv(E_j)(x\in A_j)\}$

(c) $A_i\cap A_j=0 \quad (i\neq j)$

証明 f_i を B_i を重複なしに enumerate する recursive 関数とし，$b_i(s, n)$ を次のように定義する。

$$b_i(s, n)=\begin{cases}0 & (E_k)(k\leq s \ \& \ f_i(k)=n) \text{ が成立するとき} \\ 1 & \text{他の場合}\end{cases}$$

$a_1(s, x), \cdots\cdots, \ a_m(s, x), \ y_i(s, x, y), \ P_i(s, x, y), \ m_i(s, x), \ k_i(s, x) \ (i<m)$ を次のように定義する。

stage $s=0$:

$a_1(0, f_m(0))=0$

$a_1(0, x)=1 \qquad x\neq f_m(0)$ のとき

$a_2(0, x)=\cdots\cdots=a_m(0, x)=1,$

$P_i(0, x, y)=2, \quad y_i(0, x, y)=1,$

$m_i(0, x)=K_i(0, x)=0$

$(i<m)$

priority method の効果を明瞭にするため

$a_1(s, x, y), \cdots\cdots, \ a_m(s, x, y),$

$y_i(s, x, y, z), \quad P_i(s, x, y, z),$

$m_i(s, x, y), \quad k_i(s, x, y) \quad (i<m)$

を次のように定義する。

$a_i(0, x, y)=a_i(0, x),$

$y_i(0, x, y, z)=y_i(0, x, y),$

$P_i(0, x, y, z)=P_i(0, x, y),$

$m_i(0, x, y)=m_i(0, x),$

$k_i(0, x, y)=k_i(0, x), \quad i<m$

stage $s>0$

$$a_i(s, x, k)=\begin{cases}0 & a_i(s-1, x)=0 \text{ のとき} \\ 0 & k=i \text{ で } f_m(s)=x \text{ のとき} \\ 1 & \text{他の場合}\end{cases}$$

$$y_i(s, x, y)=\mu t_{t\leq s}[T_1{}^1(\prod_{e=1}^{m}(\prod_{j<t} p_{2,3j}{}^{a_e(s,j)}), e_i, x, y, t)]$$

このような t が存在しないときは $y_i(s, x, y)=s+1$ とおく。

$$y_i(s, x, y, k)=\mu t_{t\leq s}[T_1{}^1(\prod_{e=1}^{m}(\prod_{j<t} p_{2,3j}{}^{a_e(s,j,k)}), e_i, x, y, t)]$$

このような t が存在しないときは $y_i(s, x, y, k)=s+1$ とおく。

こゝで e_i は述語 $\bar{P}_i(x, y, X_1, \cdots\cdots)$ の Gödel 数とする。

$$P_i(s,x,y)=\begin{cases}U(y_i(s,x,y)) & y_i(s,x,y)\leq s \text{ のとき}\\ s+2 & \text{他の場合}\end{cases}$$

$$P_i(s,x,y,k)=\begin{cases}U(y_i(s,x,y,k)) & y_i(s,x,y,k)\leq s \text{ のとき}\\ s+2 & \text{他の場合}\end{cases}$$

$$m_i(s,x)=\mu t[P_i(s,x,t)\neq b_i(s,t)]$$

$$m_i(s,x,k)=\mu t[P_i(s,x,t,k)\neq b_i(s,t)],$$

$$K_i(s,x)=\begin{cases}K_i(s-1,x) & (n)(n<m_i(s,x)\to y_i(s,x,n)\leq K_i(s-1,x)] \text{ のとき}\\ \mu t(n)[n<m_i(s,x)\to y_i(s,x,n)\leq t] & \text{他の場合}\end{cases}$$

$$K_i(s,x,k)=\begin{cases}K_i(s-1,x,k)(n)(n<m_i(s,x,k)\to y_i(s,x,n,k)\leq K_i(s-1,x,k)) \text{ のとき}\\ \mu t(n)[n<m_i(s,x,k)\to y_i(s,x,n)\leq t] \quad \text{他の場合}\end{cases}$$

$$x_0(s)=\mu x(Ei)(Ek)\ \{K_i(s-1,x)<K_i(s,x,k)\}$$

$$t(s)=\mu_i(Ek)\ \{K_i(s-1,x)<K_i(s,x,k)\}$$

$$a_i(s,x)=\begin{cases}0 & i+1=t(s) \text{ で } x=f_m(s) \text{ のとき}\\ a_i(s-1,x) & \text{他の場合}\end{cases}$$

上に定義された $a_i(s,x)$ に対して

$$x\in A_i\equiv(Es)(a_i(s,x)=0)$$

により定義される A_1, ……, A_m は定理の条件を満足する。

Lemma 1.　有限集合 $\{K_i(s,x)\mid s\geq 0\}$

に対して s_0 が存在し $s_0<s$ なるすべての s に対して

$$(k)\{K_i(s-1,x)=K_i(s,x,k)\}$$

証明：$K_i(s,x)\leq K$, $s=0,1,\cdots\cdots$

とする。そのとき

$$m_i(s,x)\leq M,\ s=0,1,\cdots\cdots$$

なる M が存在する。

recursive 関数 $f_i(x)$ は B_i を重複なしに enumerate するから

$s_0<x$ に対して $f_i(x)>K+M$

となる。

このとき　$s_0<s$ ならば

$$m_i(s-1,x)=m_i(s,x)$$

従って

$$K_i(s-1,x)=K_i(s,x)$$

Lemma 2.　$\{K_i(s,x)|s\geq 0\}$ はすべての x に対して有限集合である。

証明　$\{K_i(s,x)|s\geq 0\}$ が無限集合であるような x が存在すると仮定する。

$\{K_i(s,x)|s\geq 0\}$ が無限集合であるような最小の x を x_1 とし，x_1 に対して上の集合が無限であるような最小の i を i_1 とする。

$s_1=\{K_{i_1}(s,x_1)|s\geq 0\}$ とおく。

s_1 が無限集合であるから

$$\{s|x_1=x_0(s)\ \&\ s\geq 0\}$$

は無限集合である。従って Lemma 1 より，s_1 が存在して

$s_1<s$ ならば

$$t(s)=i_1+1 \text{ で } x_0(s)=x_1$$

であるか

$$x_0(s)>x_1 \text{ か } t(s)>i_1+1$$

となる。

$x_0(s)>x_1$ であるか $t(s)>i_1$ であれば

$$(k)\{K_{i_1}(s-1,\ x_1)=K_i(s,\ x_1,\ k)\}$$

であり，特に

$$K_{i_1}(s-1,x_1)=K_i(s,\ x_1,\ i_1)$$

従って $f(s)\geq K_i(s-1,\ x_1)$

となる。

s_1 が無限集合であり，

$$K_i(s-1,x)\leq K_i(s,\ x) \qquad i=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ m-1$$
$$x=0,\ 1,\ \cdots\cdots$$

であるから，定理3の系より

$i_1\neq k$ であれば A_k は recursive 集合となる。しかもこのとき

s_1 が無限集合であるからすべての y に対し，

$$y\in B_{i_1}\equiv p_i(x_1,\ y,\ A_1,\ \cdots,\ A_{i_1},\ A_{i_1+2},\ \cdots,\ A_m)$$

となり，B_i は $A_1,\ \cdots,\ A_{i_1},\ A_{i_1+2},\ \cdots,\ A_m$ に recursive，結局 B_i は recursive 集合となる。

これは仮定に反する。

Lemma 2 より定理の条件 (a) が満足されていることが示された。

条件 (b)，(c) については A_i の構成から容易に検証される。

定理5の特別な場合として次の Sacks の定理をうる。

系 (Sacks の定理)(7) non-recursive r. e. 集合 B に対して，A_i は B に recursive であり，B は A_i に recursive でない r. e. 集合 $A_i(i=1,\ \cdots\cdots,\ m)$ が存在する。

ここで m は任意の自然数である。

証明　定理5において $B_0=B_1=\cdots\cdots=B_m=B$ とし

$$\bar{P}_i(x,\ y,\ X_1,\cdots\cdots,\ X_{m-1})=\bar{P}_i(x,\ y,\ X_{i+1})\equiv(Ez)\{T_1{}^{X_{i+1}}(x,\ y,\ z)\ \&\ U(z)=0\}$$

とおけばよい。

文　　献

(1) K. Gödel, Monatshefte für Math. u. Phy. vol. 38, pp. 173—198 (1931)

(2) E. L. Post, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 50, pp. 284—316 (1944)

(3) S. C. Kleene and E. L. Post, Ann. of Math., vol. 59, pp. 379—407. (1954)

(4) S. C. Kleene, Amer. Jour. Math., vol. 77, pp. 405—428, (1955)

(5) R. M. Friedberg, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. vol. 43, pp. 236—238 (1957)

(6) A. A. Muchnik, Dokl. Akad. nauk SSSR, vol. 108, pp. 194—197. (1956)

(7) G- E. Sacks, Degrees of unsolvability (1963)

(8) 〃 〃, Ann. of Math., vol. 77, pp. 211—231 (1963)

(9) 〃 〃, Ann. of Math., vol. 80, pp. 300—312, (1964)

(10) C. E. M. Yates, T. Symb. Log., vol. 31, pp. 159—168 (1966)

(11) H. Rogers Jr., Math. Ann., vol. 138, pp. 125—140 (1959)

(12) 〃 〃, T. Symb. Log., vol. 23, pp. 331—341 (1958)

(13) S. C. Kleene, Introduction to metamathematics, (1952)

(14) M. Davis, Computability & Unsolvability (1958)